

Copula ile Portföy Riskinin Hesaplanması: BİST100 ve USD Kuru Üzerine Bir Uygulama

Sadullah Çelik¹

Başvuru/Received: 14/04/2022

Yayın/Online Published: 20/10/2022

Kabul/Accepted: 03/09/2022

Özet

VaR analizi, finansal riski ölçmek, yönetmek ve belirli bir süre boyunca bir yatırım veya portföyden kaynaklanan potansiyel zararı ölçmek için bir yol sağlar. Bu nedenle finansal kurumlar ve yatırımcılar için popüler bir risk yönetim aracı olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmanın amacı, çok değişkenli copula yöntemi aracılığıyla finansal risk tahminlemesi yaparak yatırımcılara bazı öngörüler sağlanmaktadır. Çalışmada BİST100 ve USD/TL kurundan oluşan bir portföydeki varlıkların günlük getiri oranlarının birleşik dağılımı copula yöntemi kullanılarak modellenmiştir. Bu ortak dağılım, portföy VaR'nın hesaplanmasında kullanılmıştır. Çalışmada copula yönteminin kullanılmasının temel nedeni varlık fiyat getirileri için çok değişkenli bir normal dağılımın varsaydığı standart VaR hesaplama yönteminden daha az varsayımaya dayanmasıdır. Analizler sonucunda temel verilere en iyi uyan bağıntı yapısı t-copula ile modellenmiştir. Elde edilen bu t-copula çok değişkenli normal dağılımın belirli bir korelasyon yapısını tanımlamaktadır. Analizler sonucunda %99 güven düzeyinde portföyün VaR'ı hesaplanmış ve çok değişkenli normal dağılım olduğu kabul edilen portföy VaR sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Analiz sonuçları BİST100 ve USD/TL den oluşan bir portföy de USD/TL ağırlığı arttıkça portföy risk oranının azaldığını göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: copula, VaR, Shapiro-Wilk testi, Kolmogorov-Smirnov testi

JEL Sınıflandırması: C01, C10, C15, C19

Calculating Portfolio Risk with Copula: An Application on BIST100 and USD Exchange Rates

Abstract

VaR analysis provides a way to measure and manage financial risk and the potential loss from an investment or portfolio over a period of time. For this reason, it is used as a popular risk management tool for financial institutions and investors. The aim of this study is to provide some insights to investors by making financial risk estimation through the multivariate copula method. In the study, the combined distribution of the daily return rates of the assets in a portfolio consisting of BIST100 and USD/TL rates is modeled using the copula method. This common distribution is used to calculate portfolio VaR. The main reason for using the copula method in the study is that it is based on fewer assumptions than the standard VaR calculation method, which assumes a multivariate normal distribution for asset price returns. As a result of the analysis, the correlation structure that best fits the basic data was modeled with t-copula. This obtained t-copula describes a certain correlation structure of the multivariate normal distribution. As a result of the analysis, the VaR of the portfolio at 99% confidence level was calculated and compared with the VaR results of the portfolio, which is considered to be a multivariate normal distribution.

¹ Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Nazilli İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Uluslararası Ticaret ve Finansman Bölümü, Aydın, Türkiye, sadullah.celik@adu.edu.tr Orcid no: 0000 – 0001-5468-475X

Analysis results show that portfolio risk ratio decreases as USD/TL weight increases in a portfolio consisting of BIST100 and USD/TL.

Keywords: copula, VaR, Shapiro-Wilk test, Kolmogorov-Smirnov test

JEL Classification: C01, C10, C15, C19

1. Giriş

Küreselleşmenin etkisiyle, dünyanın herhangi bir bölgesinde yaşanan ekonomik gelişmeler diğer ülke ekonomilerini giderek daha fazla etkilemektedir. Bu ise ülke ekonomilerinin birbirine daha da bağımlı olmasını sağlamaktadır. Küreselleşmenin etkisi ve finansal piyasalarda yaşanan gelişmeler hem uluslararası hem de ulusal kaynaklı finansal risklerinde artmasına neden olmuştur. Bu artan riskler, yatırımcıları ve işletmeleri döviz kuru riski, faiz riski ve fiyat riski gibi riskleri yönetmeye zorlamıştır (Yılmaz ve Yıldız, 2022). Yatırımcılar ve işletmeler için en önemli konulardan biri de portföy riskidir. Portföy riski, belirli bir yatırım portföyü ile ilişkilendirilen risk miktarıdır (Hoffmann et al., 2013). Risk yatırımcının öngörülemez ve kontrol edilemez sonuçları çekmesi durumudur. Bu durum yatırımcının beklentilerini karşılayamamasına neden olabilmektedir (Sadgrove, 2016). Portföy riski, belirli bir yatırım portföyü ile ilişkilendirilen risk miktarıdır (Hoffmann et al., 2013). Yatırımcılar, maruz kaldıkları risk miktarını en aza indirmek için çeşitlendirilmiş bir portföye sahip olmak önemlidir. Yatırımcılar portföylerini çeşitlendirerek yatırımlarıyla ilişkili riski dağıtabilir ve potansiyel kayıplarını en aza indirebilir. Yatırımcıların portföylerindeki risk miktarını en aza indirmelerinin önemli nedenlerinden biri, genel getirileri üzerinde önemli bir etkiye sahip olabilmesidir. Bir yatırımcının yüksek riskli bir portföyü olduğunda, daha büyük bir kayıp potansiyeli vardır. Bu, yatırımcının getiri elde etme kabiliyeti üzerinde olumsuz bir etkiye sahip olabilir. Bir portföydeki riski en aza indirmenin önemli olmasının bir başka nedeni de yatırımcının sermayesini korumaya yardımcı olabilmesidir. Eğer bu kayıplar yeterince büyükse, yatırımcı tüm sermayesini kaybedebilir. Bu durum yatırımcıyı zor bir finansal durumda bırakabilir.

Finansal risk analizi bir yatırım kararı ile ilgili riskleri belirlemek ve ölçmek için geliştirilmiştir (Liu et al., 2017). Finansal risk analizi yatırımcılar için önemlidir. Çünkü yatırım kararlarıyla ilişkili riskleri belirlemelerine ve ölçmelerine imkân sağlar. Yatırımcılar, ilgili riskleri anlayarak, kaynaklarını nereye tahsis edecekleri konusunda daha bilinçli ve verimli kararlar alabilirler. Ayrıca, yatırımcılar risk analizi yaparak yatırımlarının potansiyel getirisini ve bu getiriye elde etme olasılığını hesaplayabilmektedir.

Riske Maruz Değer (Value At Risk-(VaR)) analizi, finansal risk analiz için kullanılan en önemli yöntemlerdendir. Bu yöntem, belirli bir süre boyunca bir yatırımın maruz kalabileceği potansiyel zararın bir ölçüsünü sağlamaktadır. VaR, yatırımın getirilerinin oynaklığı ve yatırımın getirileri ile portföydeki diğer yatırımların getirileri arasındaki korelasyon dikkate alınarak hesaplanır (Kręzolek, 2016). VaR, belirli bir güven düzeyini göz önüne alarak, belirli bir zaman dilimi boyunca bir portföyün maruz kalabileceği maksimum potansiyel kaybın tahmin edilmesini sağlar. Bu nedenle yatırımcılar tarafından çok fazla kullanılmaktadır.

Finansal risk yönetiminde VaR kullanmanın iki temel nedeni vardır. Birincisi, VaR, risk kontrol amaçları risk limitlerini ve tetikleyicileri belirlemek için kullanılabilir (Rockafellar & Uryasev, 2002). Örneğin, bir finans kurumu, belirli bir süre boyunca borsanın maruz kalabileceği zarar miktarına bir sınır koymak için VaR kullanabilir. İkincisi, VaR, potansiyel kayıplar hakkında erken uyarı sinyalleri oluşturmak için kullanılabilir (Ismail et al., 2022). Örneğin, bir VaR modeli, piyasada oluşan fiyat varlığın aleyhine hareket ederse, portföyün zarar görme riskinin büyüklüğünü gösterebilmektedir.

Finansal yatırımcıların VaR tahminlemede kullandığı en önemli yöntemlerden biri de copuladır. Copula kullanılarak VaR tahmininin yapılmasının birkaç nedeni vardır. Birincisi, Copula yöntemi, rassal değişkenler arasındaki bağımlılığı tahmin etmenin bir yoludur (Zeng & Durrani, 2011). VaR tahmininde bu önemlidir, çünkü değişkenlerin nasıl ilişkili olduğunu ve gelecekte nasıl birlikte hareket edebileceklerini daha iyi anlamamızı sağlar. İkincisi, bir varlık portföyünün VaR tahmini, copula kullanılarak tahmin edilebilir. Bu sayede daha doğru bir risk değerlendirmesi yapılır (Kole et al., 2007). Üçüncüsü, copula yöntemi, çeşitli zaman dilimleri için VaR tahmininin de kullanılabilir. Bu daha kapsamlı bir risk değerlendirme imkânı sağlar (Huang et al., 2009). Son olarak, copula yöntemi, farklı veri türlerine ve farklı model türlerine uyarlanabilen esnek bir yöntemdir (Ma et al., 2022). Bu esneklik VaR tahminine daha özelleştirilmiş bir yaklaşım sağlar.

Bu çalışmanın amacı, copula yöntemini kullanarak finansal risk tahminlemesi yaparak yatırımcılara bazı öngörüler sunmaktır. Bu amaçla çalışmada 04.01.2010-13.09.2022 dönemi arasında BİST100 ve USD günlük getirileri kullanılarak VaR tahminlemesi yapılmıştır. Çalışmanın giriş bölümünden sonraki ikinci bölümde literatür taraması verilmiştir. Üçüncü bölümde çalışmada finansal riski hesaplamak için kullanılan yöntem hakkında temel bilgiler verilerek teorik altyapısı açıklanmıştır. Dördüncü bölümde analiz sonuçları ve bulgular verilmiştir. Son bölümde ise elde edilen çıkarımlar ve değerlendirmeler sunulmuştur.

2. Literatür Taraması

Ayvaz (2006), "Döviz Kuru ile Hisse Senedi Fiyatları Arasındaki Nedensel İlişki" makalesinde döviz kuru ile hisse senedi fiyatları arasındaki nedensel ilişkiyi araştırmıştır. Granger nedenselliğini test etmek için İstanbul Menkul Kıymetler Borsası ve Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası verilerini kullanmıştır. Sonuçlar, döviz kuru ile hisse senedi fiyatları arasında nedensel bir ilişki olduğunu göstermiştir.

Akın ve arkadaşları (2018), "Makroekonomik Gelişmelerin BİST100 Endeksi'ne Etkileri" başlıklı makalede makroekonomik gelişmelerin BİST100 Endeksi üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Çalışmada Ocak 2004'ten Aralık 2016'ya kadar aylık veriler kullanılmıştır. Çalışma, küresel mali kriz dönemini ve sonraki yılları kapsamaktadır. Yazarlar, makroekonomik gelişmelerin BİST100 Endeksi üzerindeki kısa ve uzun vadeli etkilerini araştırmak için Otoregresif Dağıtılmış Gecikme (ARDL) modelini kullanmışlardır. Çalışmanın sonuçları, makroekonomik gelişmelerin hem kısa hem de uzun vadede BİST100 Endeksi üzerinde önemli etkileri olduğunu göstermektedir. Kısa vadede enflasyona, para arzına ve faiz oranlarına yönelik pozitif şoklar endekste artışa, bu değişkenlere verilen negatif şoklar ise düşüslere yol açmaktadır. Uzun vadede döviz kuru dışındaki tüm değişkenlerin BİST100 Endeksi üzerinde

önemli etkileri bulunmaktadır. Enflasyona, para arzına ve faiz oranlarına yönelik pozitif şoklar endekste artışa, bu değişkenlere verilen negatif şoklar ise düşüslere yol açmaktadır.

Hamad Ameen ve arkadaşları (2020) çalışmalarında, BİST100 endeksine odaklanarak, enflasyonun borsa endeksleri üzerindeki etkisine ilişkin literatürü gözden geçirmişlerdir. Bulgular enflasyonun hisse senedi fiyatlarını olumsuz etkilediğini ve bu etkinin yüksek enflasyon dönemlerinde daha belirgin olduğunu göstermiştir. Çalışma ayrıca, hisse senedi fiyatlarının kısa vadede enflasyona uzun vadede olduğundan daha duyarlı olduğunu ortaya koymuştur.

Genç ve Öztürk (2021), "Türkiye'de Hisse Senedi Fiyatları ve Döviz Kurları İlişkisi: Asimetrik Nedensellik Yaklaşımı ve Markov Rejimi Değişim Modeli" makalelerinde, Türkiye'de hisse senedi fiyatları ile döviz kurları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Yazarlar, Türkiye'de hisse senedi fiyatları ile döviz kurları arasında güçlü bir ilişki olduğunu bulmuşlardır. Ayrıca hisse senedi fiyatları ile döviz kurları arasındaki ilişkide önemli miktarda asimetri olduğunu bulmuşlardır.

Zengin (2020), Türkiye'de faiz oranları, ABD Doları, Euro ve BİST100 endeksi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Çalışma da faiz oranları ile BİST100 endeksi arasında pozitif bir ilişki olduğunu tespit edilmiştir. Ayrıca sonuçlar ABD Doları ve Euro'nun BİST100 endeksi üzerinde olumsuz etkisi olduğunu göstermiştir.

Yüce (2021), döviz kurlarından Dolar ve Euro ile mevduat faizi, altın, BİST xu100 ve devlet iç borçlanma senetleri endeksi arasındaki nedensellik ilişkisini ölçmeyi amaçlamıştır. Çalışma Granger nedensellik testini kullanarak yapılmıştır. Sonuç olarak, dolar, euro, altın, BİST100 endeksi ve devlet iç borçlanma senetleri endeksi arasında nedensellik ilişkisi olduğu görülmüştür.

Şenol, (2021) "Borsa, Döviz Kurları, Faiz Oranları ve CDS Primleri Arasındaki Volatilite Yayılımı: Türkiye'den Kanıtlar" makalesinde borsa, döviz kurları, faiz oranları ve kredi temerrüt takası (CDS) primleri arasındaki oynaklık yayılımını incelemiştir. Şenol, borsa ile döviz kurları arasında olduğu kadar borsa ile faiz oranları arasında da önemli bir yayılma olduğunu tespit etmiştir. Ancak, borsa ile CDS primleri arasında önemli bir yayılma yoktur. Bu sonuçlar, Türkiye'deki yatırımcıların hisse senedi piyasası ile döviz kurları arasında olduğu kadar hisse senedi piyasası ile faiz oranları arasındaki oynaklık yayılma potansiyelinin farkında olmaları gerektiğini göstermiştir.

Akdağ ve Yıldırım (2021) çalışmalarında belirsiz Avrupa ekonomi politikalarının BİST100 endeksi üzerindeki etkisine ilişkin literatürü gözden geçirmişlerdir. Çalışma, belirsiz ekonomi politikalarının BİST100 endeksini olumsuz etkilediğini tespit etmiştir. Çalışma, politika yapıcıların politikalarının BİST100 endeksi üzerindeki etkisinin farkında olmaları gerektiği sonucuna varmıştır.

Yıldız ve Yılmaz (2022) çalışmalarında, BİST100'de yer alan işletmelerin döviz kuru riskinin bu işletmelerin karlılık oranları üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Araştırmacılar 2012:Q1-2022:Q3 dönemini baz alarak yaptıkları çalışmada işletmeleri ihracat yapan, ihracat yapmayan, finansal, finansal olmayan ve tüm firmalar şeklinde ayrı gruplarda ele almışlardır.

Çoklu doğrusal regresyon analizinin kullanıldığı çalışmanın sonuçlarına göre, döviz kurlarından pozitif yönde etkilenen işletmelerin döviz kurundaki değişimleri işletme lehine kullanabilecek şekilde yönetebildikleri tespit edilmiştir. Ayrıca tüm işletme gruplarına ait karlılık oranları döviz kurlarına karşı önemli düzeyde bir risk taşımasa da döviz kurunun etkilerinin genellikle negatif ve anlamlı olduğu tespit edilmiştir.

Yukarıdaki çalışmalardan da görüleceği üzere BİST100 ile USD/TL kurunu inceleyen birçok ekonometrik çalışma bulunmaktadır. Fakat literatürde copula yöntemini kullanarak BİST100 ve USD/TL arasındaki ilişkiyi inceleyen herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Çalışmanın bu bağlamda literatüre katkı sağlayacağı kanaatindeyiz.

3. Yöntem ve Veri

3.1. Riske Maruz Değer (VaR)

VaR, bir yatırımcı veya finansal kurumun bir pozisyon alması durumunda ne kadar kayıp ya da kar etmesi gerektiğini belirlemeye yarayan bir risk yönetimi aracıdır (Yamai & Yoshiba, 2005). VaR, pozisyonun belirli bir zaman aralığında kaybedebileceği maksimum değeri göstermektedir. Değer yöntemi olarak kullanılan bir parametrik risk analizi yöntemi olan VaR piyasa koşullarında meydana gelen ani fiyat dalgalanmalarının (volatilite) ölçülmesinde kullanılabilir.

Yatırımcılar için risk, para kaybetme olasılığı ile ilgilidir ve VaR bu sağduyu gerçeğine dayanmaktadır. Yatırımcıların büyük kayıpların meydana gelme olasılığını önemsemektedir. Bu durum da VaR, "En kötü durum senaryom nedir?" veya "Gerçekten kötü bir ayda ne kadar kayıp yaşayabilirim?" Sorularına yanıt bulmak için kullanılabilir (Kaura, 2005:2).

VaR istatistiğinin üç bileşeni vardır: belirli bir zaman aralığı, belirli bir güven düzeyi ve bir dönemde beklenen en kötü kayıp miktarı (veya kayıp yüzdesi). Bu nedenle, VaR aşağıdaki soruları yanıtlamak için kullanılabilir (Kaura, 2005:2):

- Gelecek ay içinde TL olarak kaybetmeyi bekleyebileceğim en fazla değer kaybı (%95 veya %99 güven düzeyi ile) nedir?
- Gelecek yıl beklenilebilecek maksimum kayıp yüzde (%95 veya %99 güvenle) kaçtır?

VaR hesaplanması birkaç nedenden dolayı önemlidir. Birincisi, VaR, riski ölçmek için bir yol sağlar. Çünkü yatırımcıların ne kadar risk almaya istekli oldukları konusunda bilinçli kararlar vermelerini sağlar. İkincisi, VaR, risk limitlerini ve stop-loss seviyelerini belirlemek için kullanılabilir. Bu yatırımcıların risk toleranslarını aşan kayıplardan korunmalarına yardımcı olur. Son olarak, VaR, farklı yatırım ürünlerinin riskini karşılaştırmak için kullanılabilir. Bu sayede yatırımcılar riske göre düzeltilmiş en iyi getiriyi sunan ürünleri seçebilmektedir.

VaR hesaplamasının birkaç farklı yöntemi vardır, ancak tüm bu yöntemlerin ortak amacı; normal piyasa koşulları altında belirli bir süre içinde bir portföyün yaşayabileceği maksimum değer kaybını tahmin etmektir.

Örneğin X olarak adlandırılan bir portföyümüz olsun. Bu takdirde R , belli bir zamandaki (örneğin, bir gün, bir hafta, bir ay, bir yıl vb.) portföy getirisi olsun. Yani bir zaman biriminde portföyün toplam değerindeki yüzde değişim R ile gösterilsin. Bazen, R değişkeninin hangi

değerleri alacağına dair bir fikir sahibi olmak için R 'nin olasılık dağılımının bilinmesi gerekir. Ayrıca, olasılıklar dahilinde olmayan kötü bir senaryo da portföydeki kaybın ne kadar büyük olacağı konusunda fikir sahibi olmak isteriz. Tüm bunlar bizi VaR tanımına götürmektedir. X portföyünün α VaR (1) denklemini sağlayan olası en büyük r değeridir (DataScienceGenie, 2022):

$$P(R > r) \geq \alpha \quad (1)$$

Denklem (1) α olasılığı ile seçilen portföyden belli bir zaman biriminde elde edilen getirinin en az r olacağı anlamına gelmektedir. Örneğin, portföyün %99 VaR'ı -%3 ise, bu takdirde %99 olasılıkla portföyün maruz kalacağı risk %3'ten fazla olmayacaktır.

Bir portföyün VaR değerinin hesaplanması için öncelikle R 'nin olasılık dağılımının bilinmesi gerekir. Ancak bir portföy birden çok varlıktan oluşmakta ve her birinin kendi fiyatı olduğu için, öncelikle R 'nin bireysel varlık getirilerinin ağırlıklı ortalaması olduğunu göstermek gerekir. Bir portföyde n tane varlığın olduğu varsayalım. Ayrıca $i \in \{1,2, \dots, n\}$ olsun. Burada X_i , i varlığın birimlerinin sayısı, P_i ise i varlığının her biriminin fiyatı olsun. Bu takdirde V_i varlığının toplam değeri (2) denklemindeki gibi hesaplanır.

$$V_i = X_i P_i \quad (2)$$

R_i , belli bir zaman birimindeki i varlığındaki getiri oranı olsun. Bu takdirde, bir zaman biriminde i varlığının fiyatındaki yüzde değişim R_i ile gösterilsin. Belli bir zamanda i varlığından elde edilen getiri ise S_i olsun. Yani, bir zaman birimi boyunca i varlığından elde edilen karı veya zararı gösterebilir.

$X_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ kümesinden oluşan bir portföy tanımlansın. Bu takdirde portföyün toplam cari değeri V olup (3) denklemindeki gibi hesaplanır.

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (3)$$

Portföydeki her bir i varlığın ağırlığı ω_i ile gösterilsin. Bu takdirde ω_i (4) denklemindeki gibi hesaplanır.

$$\omega_i = \frac{V_i}{V} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Portföyünün bir zaman birimindeki toplam getirisi ise S olsun. Bu takdirde S , portföyde bulunan her bir varlığın getirisinin toplamı olup (5) denklemindeki gibi hesaplanır.

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = S_1 + S_2 + \dots + S_n \quad (5)$$

Sonuç olarak, bir portföy üzerindeki getiri oranı R (6) denklemindeki gibi hesaplanır.

$$R = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots + \omega_n R_n \quad (6)$$

Elde edilen bu sonuçlardan α VaR, (7) denklemini sağlayan mümkün olan en büyük r değeridir.

$$P(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots + \omega_n R_n > r) \geq \alpha \quad (7)$$

Burada α VaR'ın hesaplanması için R_1, R_2, \dots, R_n ortak dağılımının bilinmesi gerekir. Buradaki her bir R_i tek değişkenli bir dağılıma sahipken ortak dağılımları n değişkenli bir dağılıma sahiptir. Sklar's Teoremi, her çok değişkenli dağılımın marjinal dağılım ve bir copula cinsinden ifade edilebileceğini kanıtlamaktadır. Böylece copula, değişkenler arasındaki korelasyon yapısını tanımlar. Örneğin, çok değişkenli normal dağılım, tümü tek değişkenli normal olarak dağılan marjinal dağılımlardan ve "Gauss" adlı bir copula'dan oluşmuş olsun. Bununla birlikte, özellikle Gumbel, Frank, Clayton ve t-copula gibi başka copulalar da vardır. Bu copulaların her biri, değişkenler arasındaki korelasyon yapısını benzersiz bir şekilde modeller. Ayrıca, marjinaller için farklı dağılımlarda seçilebilmektedir. Örneğin, üç marjinal olarak t dağılımı, gama dağılımı ve normal dağılım ile bir Gauss copulasından üç değişkenli bir dağılım oluşturulabilir (DataScienceGenie, 2022).

Varyans-kovaryans yaklaşımı, copula yöntemi, Monte Carlo simülasyonu VaR hesaplamada kullanılan yöntemlerden bazılarıdır.

VaR hesaplamada kullanılan en popüler yöntemlerden birisi varyans-kovaryans yaklaşımıdır. Bu yöntem, bir portföyün getirilerinin varyansını ve kovaryansını tahmin etmek için geçmiş verileri kullanır. Bu tahminler daha sonra portföyün VaR'ının hesaplanmasında kullanılır.

VaR hesaplamada kullanılan bir diğer yöntem ise yöntem Monte Carlo simülasyonudur. Bu yaklaşım, mevcut piyasa koşullarına dayalı olarak çok sayıda olası gelecek senaryosunun rastgele oluşturulmasını içerir. Daha sonra her senaryo, portföyün ne kadar zarar göreceğini görmek için değerlendirilir. VaR, bu durumda senaryoların belirli bir yüzdesinde, tipik olarak %95 veya %99'unda meydana gelen maksimum kayıptır.

Bununla birlikte, VaR'ın bazı dezavantajları da vardır. Birincisi, VaR yalnızca beklenen maksimum kaybı ölçer. Kaybetme olasılığını hesaba katmaz. İkincisi, geriye dönük bir ölçümdür, bu nedenle gelecekteki kayıpları tahmin etmede doğru olmayabilir. Üçüncüsü, doğru olmayabilecek istatistiksel modellere dayanmaktadır. Son olarak dördüncüsü, tüm risk türlerini hesaba katmaz.

Genel olarak, VaR, piyasa riskini yönetmek için yararlı bir araçtır. Fakat, sınırlamalarını anlamak ve onu diğer risk önlemleriyle birlikte kullanmak önemlidir. Sonuçta kullanılan yöntem ne olursa olsun, VaR hesaplanması finansal risk yönetimi için önemli bir araçtır.

3.2. Copula

Copula yöntemleri, finansal analizde rastgele değişkenler arasındaki bağımlılığı tanımlamada yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle, varlık getirileri arasındaki bağımlılığı modellemek için copulalar kullanılır (Jondeau & Rockinger, 2006). Copulaların bu amaç için yararlı olmasının birkaç nedeni vardır. İlk olarak, copulalar, değişkenler arasındaki doğrusal olmayan bağımlılıkları yakalayabilir; bu, varlık getiri bağımlılıklarını modellemek için önemlidir. İkincisi, copulalar, bağımlılık yapısını her bir değişkenin marjinal dağılımından ayırabilir; bu, farklı marjinal dağılımlara sahip varlık getirileri arasındaki bağımlılığı modellemek için önemlidir. Son olarak, copulalar, gelecekteki varlık getiri bağımlılıkları hakkında doğru tahminler yapmak için önemli olan, gözlemlenen verilerle aynı marjinallere sahip çok değişkenli dağılımların oluşturulmasına izin verir.

Bir copula, $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu ile tanımlanabilir ve aşağıdaki kısıtlayıcı koşulları sağlar (Nelsen, 2006):

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \forall u, v \in [0,1] \quad C(u, 0) = 0 \quad \text{and} \quad C(0, v) = 0 \\
 & \quad \quad \quad C(u, 1) = u \quad \text{and} \quad C(1, v) = v \\
 2. \quad & \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1], \quad u_1 \leq u_2 \quad \text{and} \quad v_1 \leq v_2, \\
 & \quad \quad \quad C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Birçok copula çeşidi mevcut olmakla birlikte finasta yaygın olarak Gauss copula, t-copula ve Clayton copula kullanılmaktadır.

Bir Gauss copula, her bir değişkenin marjinal olasılık dağılımının bir Gauss dağılımı olduğu çok değişkenli bir olasılık dağılımıdır (Hyrz & Schwarz, 2014). Copula, tek değişkenli normal dağılımın çok değişkenli bir genellemesidir. Gauss copula, finasta portföy optimizasyonu ve risk yönetiminde kullanılmaktadır.

Gauss copula, (9) denklemindeki gibi hesaplanır (Notsu et al., 2013).

$$\begin{aligned}
 C(u, v; \theta) &= \Phi_G(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \theta) \\
 &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\theta^2)^{1/2}} \times \left\{ \frac{-(x^2 - 2\theta xy + y^2)}{2(1-\theta^2)} \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{9}$$

t-copula, kuyruk bağımlılığını ve asimetriyi yakalayabildiği için finasta çok değişkenli bağımlılığı modellemek için kullanılan popüler bir yöntemdir. Bu yöntem, bir yatırımdaki kayıp riskinin bir ölçüsü olan VaR tahmini için iyi bir seçimdir. VaR tahmini için t-copula kullanmanın başka faydaları da vardır. Farklı veri kümelerine kolayca uyarlanabilen esnek bir modeldir. Ayrıca büyük veri kümeleriyle çalışırken önemli olan, hesaplama açısından verimlidir. t-copula (10) denklemindeki gibi hesaplanmaktadır (Ielpo & Merhy, 2017).

$$C^t(u_1, \dots, u_n; R_n, v) = t_{R_n, v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \quad (10)$$

Bir t-copula yoğunluğu, (11) denklemdeki gibi hesaplanır (Ielpe & Merhy, 2017).

$$C^t(u_1, \dots, u_n; R_n, v) = \frac{f_{R_n, v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_v(t_v^{-1}(u_i))} \quad (11)$$

Clayton copulaları, finans ve risk yönetiminde sıklıkla kullanılan bir copula sınıfıdır. Clayton copulaları birkaç nedenden dolayı önemlidir. Birincisi, tam bağımsızlıktan tam bağımlılığa kadar çok çeşitli bağımlılık yapılarını modelleyebilirler. İkincisi, matematiksel olarak çalışmak kolaydır. Son olarak, aykırı değerlere karşı sağlam olmak gibi bazı iyi istatistiksel özelliklere sahiptirler. Copulaların finanstaki en önemli kullanımlarından biri VaR hesaplanmasıdır. VaR, normal piyasa koşulları altında belirli bir zaman diliminde bir portföyün maruz kalabileceği maksimum kaybın bir ölçüsüdür. Bankalar, hedge fonları ve diğer finansal kuruluşlar tarafından riski değerlendirmek ve yönetmek için VaR'ı kullanılır.

Bir Calyton copulası (12) denklemindeki gibi tanımlanır.

$$C_\theta(u_1, \dots, u_d) = \left(\sum_{i=1}^d (u_i^{-\theta}) - d + 1 \right)^{-1/\theta} \quad (12)$$

Calyton copulaları, standart Gauss kopulasının bir genellemesidir ve Gauss copulasından daha geniş bir bağımlılık aralığını yakalayabilmektedir. Bu, büyük kayıplara yol açabilecek kuyruk risklerini daha iyi modelleyebildikleri için, onları VaR hesaplaması için daha doğru bir araç haline getirir. Her biri farklı türde bir bağımlılık yakalamak için tasarlanmış bir dizi farklı Calyton copulası vardır. En yaygın Calyton copulaları üstel, Clayton ve Gumbel copulalarıdır.

3.3. Veri

Bu çalışmada 04.01.2010-13.09.2022 dönemi arasında BİST100 ve USD/TL günlük getiri oranı arasındaki bağımlılık yapısı araştırılmaktadır. Çalışmada BİST100 ve USD/TL döviz kurunun günlük getiri oranı fiyatlarının birleşik dağılımı copula kullanarak modellenmektedir. BİST100 ve USD/TL'nin seçilmiş olmasının temel nedeni Türk yatırımcıların tercih ettiği en önemli yatırım araçlarından iki tanesi olmasıdır. Bu nedenle bu yatırım araçlarını incelemeyi değerli buluyoruz. Çalışma da kullanılan veriler investing.com sitesinden alınmıştır.

Çalışmada R yazılımı kullanılarak analizler yapılmıştır. R, istatistiksel hesaplama ve grafikler için ücretsiz ve açık kaynaklı bir yazılım ortamı olup finans, ekonomi, istatistik ve veri bilimi gibi birçok alanda akademisyenler ve araştırmacılar tarafından yaygın olarak kullanılmaktadır.

R, finansal analistler ve portföy yöneticileri arasında da popülerdir. VaR hesaplanmasında R kullanılmasının birçok nedeni vardır. Birincisi, VaR hesaplamak için güçlü bir araçtır çünkü verileri analiz etmek için çok çeşitli istatistiksel ve sayısal yöntemler sunar. İkincisi, VaR hesaplama işlevleri de dahil olmak üzere finansal analiz için birçok yerleşik işleve sahiptir.

Çalışmada kullanılan R kodları ve veri seti GitHub üzerinden paylaşılmıştır. Kodlara ve veri setine <https://github.com/Sadullah4535/Copula> adresinden erişilebilir. GitHub, kullanıcıların projelerini geliştirmede kullandıkları bir sitedir. Kullanıcılar bu siteyi kullanarak kodlarını paylaşabilirler, diğer kullanıcılarla birlikte çalışabilirler ve projelerinin gelişimini izleyebilirler. GitHub ayrıca, kullanıcıların projelerini diğer kullanıcılarla paylaşmalarına ve bu projeleri geliştirmelerine olanak sağlar.

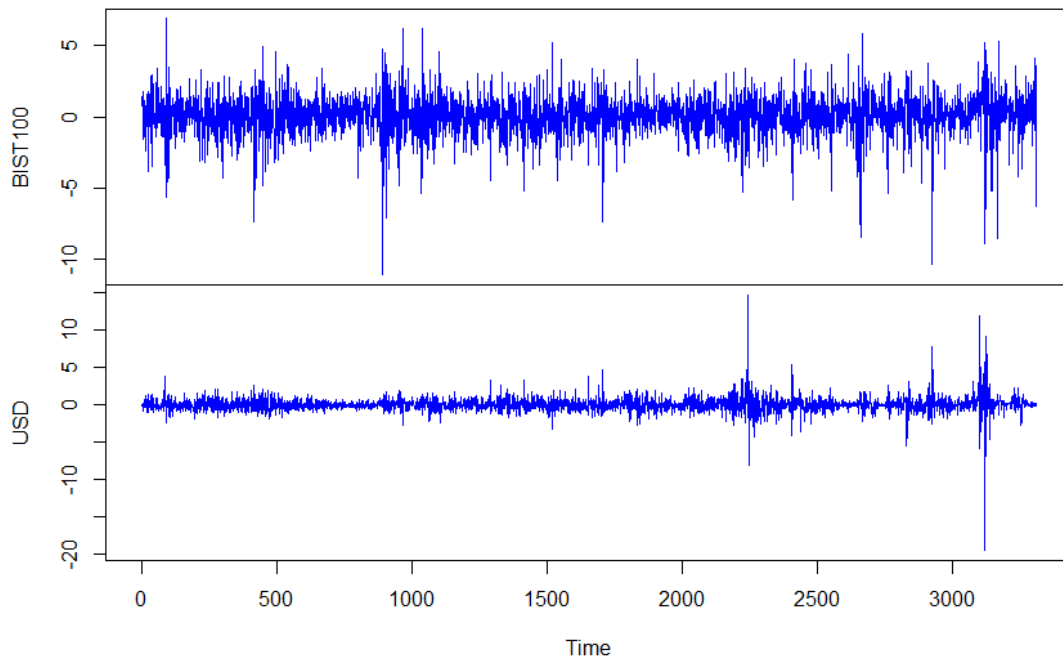
4. Analiz Sonuçları ve bulgular

4.1. Günlük Getiri Oranları

P_{it} , bir Türk Lirası (TL)'na karşılık i para biriminin miktarı olsun. Bu takdirde TL cinsinden günlük BİST100 ve USD kur getirisi r_{it} aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$r_{it} = 100 \times (\ln P_{it} / \ln P_{i,t-1}) \quad \text{Burada } i = \text{BİST100, USD} \quad (13)$$

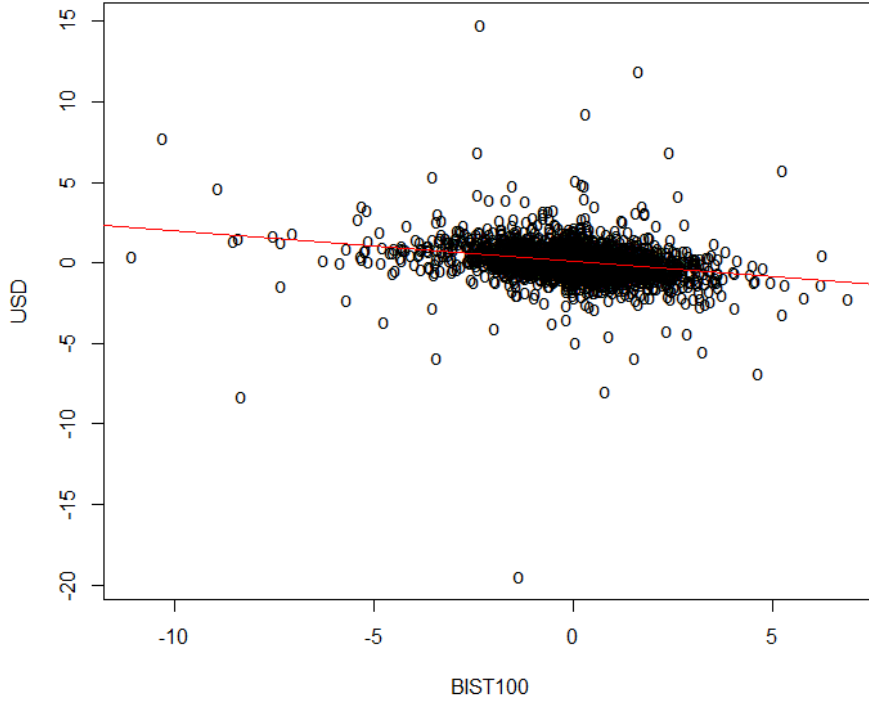
BİST100 ve USD/TL günlük getiri oranları r_{it} (1) denklemindeki gibi hesaplanarak şekil 1'deki gibi modellenmiştir.



Şekil 1: BİST100 ve USD/TL günlük getiri oranı grafiği

Şekil 1 de BİST100 ve USD/TL günlük getiri oranı grafiği verilmiştir. BİST100 USD/TL'ye göre daha hareketli bir yapıya sahip olup, dalgalı bir yapı sergilemektedir. Diğer taraftan USD/TL, BİST100'e göre daha istikrarlı bir yapıya sahiptir.

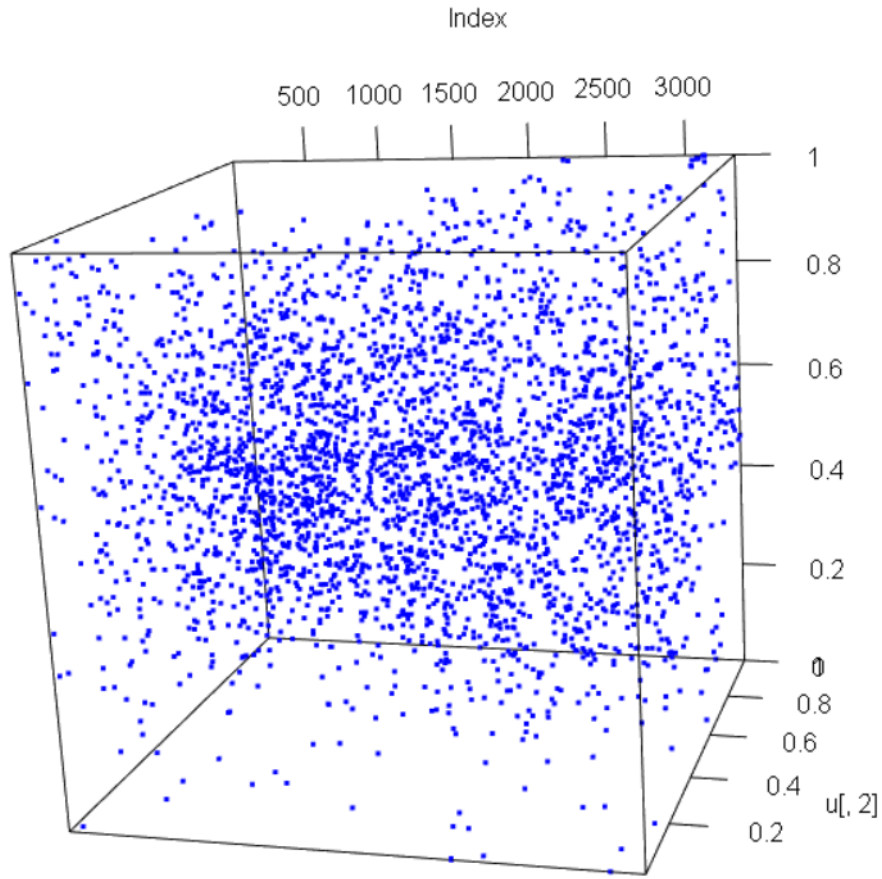
Şekil 2 de BİST100 ve USD/TL Serpilme Diyagramı verilmiştir.



Şekil 2: BİST100 ve USD/TL Döviz Kuru Serpilme Diyagramı

Şekil 2 incelendiğinde BİST100 ve UDS/TL değişkenleri arasında ters yönlü bir ilişkinin olduğu söylenebilir. Ayrıca bu görsel biçimden iki değişken arasında zayıf ve negatif bir korelasyon ilişkisinin olduğu söylenebilir. Piyasada sadece bu iki yatırım aracı bulunsaydı, bu ilişki çok kuvvetli olurdu. Ancak piyasada sadece bu iki finansal yatırım aracı bulunmamaktadır. Tercih edilebilecek farklı diğer yatırım araçlarının da bulunması bu korelasyonun zayıf çıkmasında etkili olduğu söylenebilir.

Şekil 3'te BİST100 ve USD/TL değişkenlerinin üç boyutlu dağılımları görselleştirilerek verilmiştir.

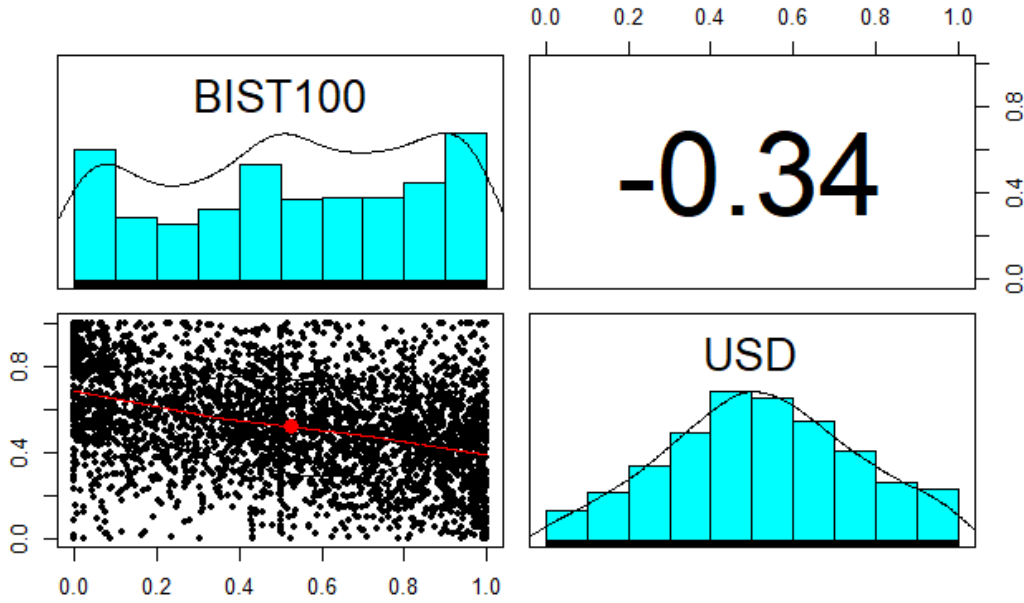


Şekil 3: BİST100 ve USD/TL değişkenlerinin üç boyutlu dağılımı

Şekil 3'teki 3 boyutlu dağılım grafiği dikkate alındığında BİST100 ve USD/TL değişkenindeki verilerin birbirinden çok uzakta olduğu ve bağımsız hareket ettiği görülmektedir.

4.2. Korelasyonun Hesaplanması

Şekil 4'te BİST100 ve USD/TL günlük getirileri arasındaki korelasyon çizelgesi verilmiştir.

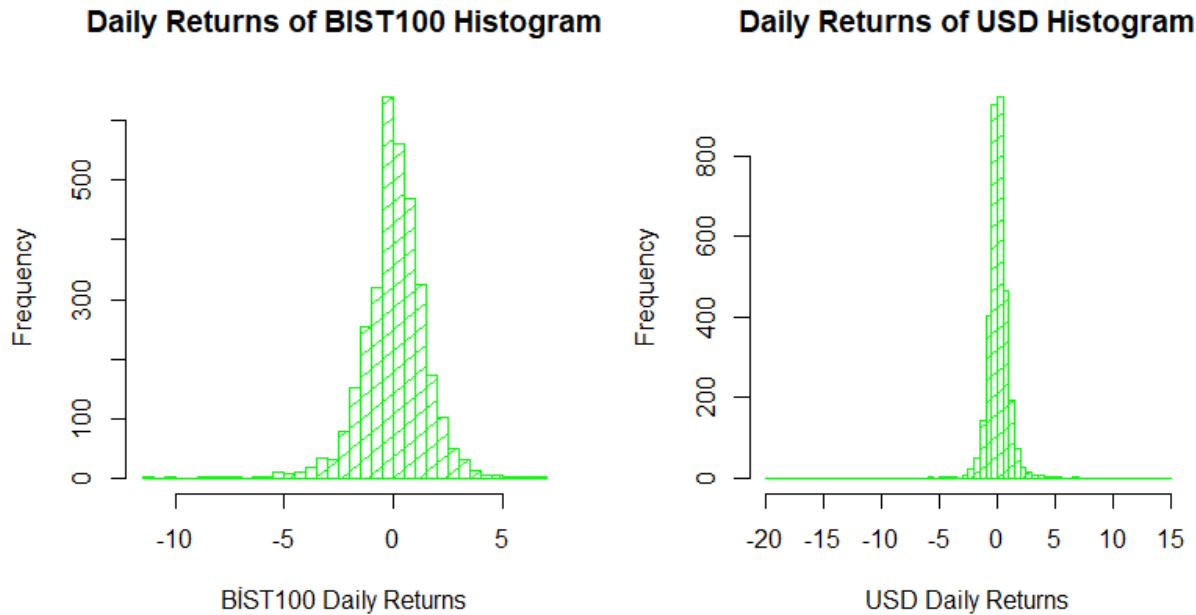


Şekil 4: BİST100 ve USD/TL korelasyon çizelgesi

Elde edilen bulgular doğrultusunda iki değişken arasında negatif (-0.34) bir korelasyon tespit edilmiş olup, bu korelasyon değerinin %1 düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı olduğu görülmüştür. Çıkan Korelasyon değeri iki değişken arasında negatif yönlü bir ilişki olduğuna ve birebir ilişki olmadığını göstermektedir. Korelasyonun negatif olması iki değişken arasında ters bir ilişki olduğu anlamına gelir. Yani, iki değişken ters yönde hareket etmektedir.

Finans açısından iki varlık arasında “negatif” korelasyonun olması varlıklardan birinin değeri artarken diğerinin değerinin azaldığı anlamına gelir. Bu BİST100 değer kazandığı dönemlerde Dolar kurunun düşük olduğu; Dolar kuru yüksekken de BİST100’ün düşüktür. Yani kur yüksekken hisse senedi düşük (değersiz) olur.

BİST100 ve USD/TL fiyatlarındaki yüzde değişimler (günlük getirileri) kullanılarak bu değişkenlere ait histogram grafikleri Şekil 4’te verilmiştir.



Şekil 4: BİST100 ve USD/TL günlük getiri histogramı

Histogramlar dikkate alındığında çok az simetrik oldukları görülmektedir. Bu nedenle BİST100 ve USD/TL getirisinden herhangi biri için normal bir dağılımın marjinal dağılım olarak uygun olup olmadığını kontrol etmek gerekir. Normallik için Shapiro-Wilk testini kullanılır. Genel bir kural olarak, $p > 0,05$ 'ten büyük bir değeri, normal dağılımın veriler için uygun bir uyum sağladığını gösterir. Shapiro-Wilk testi, bir veri setinin normal dağılıp dağılmadığını belirlemek için kullanılan istatistiksel bir testtir. Test istatistiği (W), verilerden hesaplanır ve bir kritik değerler tablosundaki kritik bir değerle karşılaştırılır. Eğer test istatistiği kritik değerden büyükse, boş hipotez reddedilir ve verilerin normal dağıldığı kabul edilmez.

Tablo 1: Shapiro-Wilk normallik testi

| | BİST100 | USD/TL |
|-----------------|---------------|---------------|
| W | 0.94346 | 0.75967 |
| p-değeri | $p < 2.2e-16$ | $p < 2.2e-16$ |

Test istatistiği kritik değeri 0.05 seçilirse BİST100 ve USD/TL için $W > 0.05$ olduğundan verilerin normal dağılmadıkları sonucuna varılır. Ayrıca BİST100 ve USD/TL için $p < 0.05$ olduğundan verilerin normal dağıldığına dair boş hipotez reddedilir. Bu nedenle, verilere uyacak başka bir dağılımın bulunması gerekir. BİST100 ve USD/TL serilerinin altında yatan dağılımı daha iyi anlamak için Tablo 2'de gruplandırılmış bazı tanımlayıcı istatistikler verilmiştir.

Tablo 2: Tanımlayıcı istatistikler

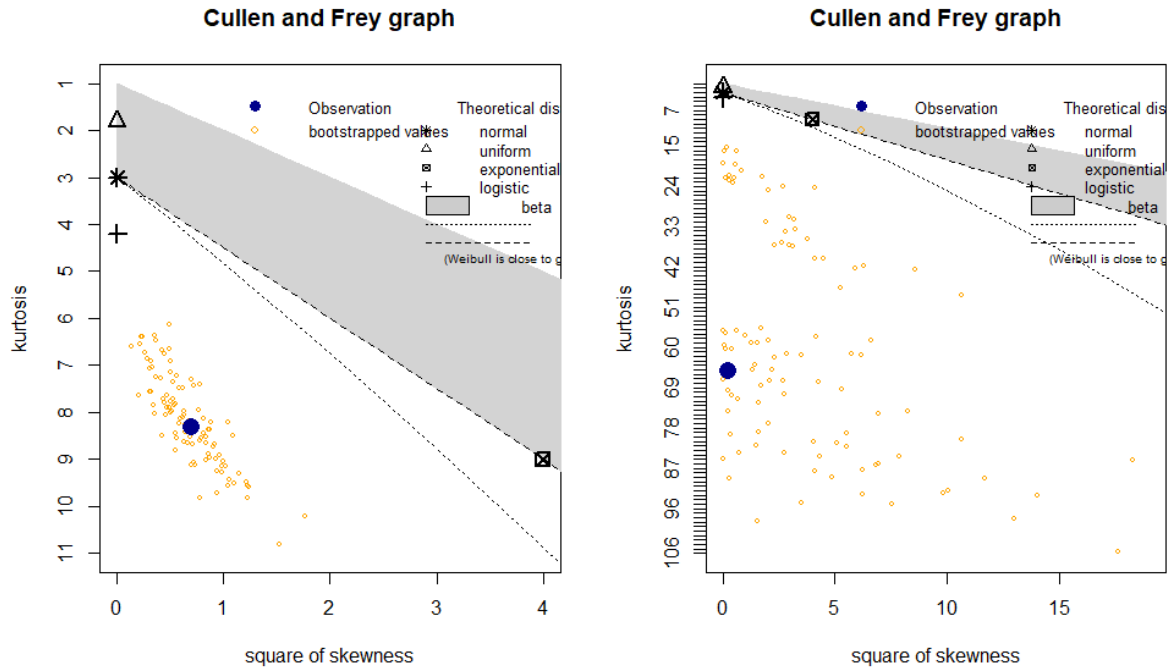
| | BİST100 | USD/TL |
|-----------------------|----------------|---------------|
| Ortalama | 0.056 | 0.076 |
| Standart Sapma | 1.442 | 1.045 |
| Çarpıklık | -0.837 | -0.496 |
| Basıklık | 5.298 | 62.155 |

Tablo 2'deki BİST100 değişkeninin ortalama değeri 0.056 ve standart sapma değeri 1.442 bulunmuştur. BİST100 ortalama değeri negatif yönde yani ortalama değerden küçük olarak çarpıklık değeri -0.837 olarak belirlenmiştir. BİST100 değişkeni, yüksek bir basıklık değeri (5.298) ve negatif bir çarpıklık değeri (-0.837) sergilemektedir. Yüksek bir basıklık değeri, seride aşırı büyük veya aşırı küçük değerlerin olduğu anlamına gelmektedir. Bu durum, yüksek bir ortalama değer çıkarılmasına sebep olur. Sonuçta, istatistiksel olarak, BİST100 değişkeni normalden uzaklaşmış durumdadır.

Tablo 2'deki test sonuçlarına göre USD/TL değişkeninin ortalaması 0.076, standart sapma 1.045, çarpıklık ve basıklık değerleri sırasıyla -0.496 ve 62.155'dir. USD/TL değişkeni anlamlı bir yelpaze (dağılımın) içinde yer almaktadır. Fakat negatif eğilimli ve yüksek bir basıklık değerine sahiptir. Bu USD/TL değişkeninin yüksek bir standart sapma ve çok sayıda uç değere sahip olduğu anlamına gelir. Bu, birçok kez dağılımın üzerinde ya da altında yer alan verilerin olmasına neden olabilir. USD/TL değişkeni oldukça düzensiz ve yüksek bir değişkenlik göstermektedir. Bu yüksek değişkenlik USD'nin yatırımcılar için riskli bir yatırım aracı olabileceğini işaret etmektedir.

BİST100 ve USD/TL yatırım aracının getirisi yüksek basıklık değeri gösterir, yani kuyrukları kalındır. Shapiro-Wilk testinde normal dağılımın kabul edilmemesinin en olası nedeni işte budur. Diğer taraftan, BİST100 ve USD/TL çarpıklığı sıfıra yakın olup getirilerinin çarpıklığı negatif değere sahiptir.

Şekil 5'te Cullen ve Frey grafiğinde, verilerin çarpıklık karesi ve basıklığı (mavi nokta olarak) çizilip teorik dağılımlarla karşılaştırılmıştır.



Şekil 5: Cullen ve Frey grafiği

Şekil 5'teki verilerden, veri kümesinin oldukça dağınık olduğu ve çok keskin bir eğriye sahip olduğu görülmektedir. Düşük veya sıfır çarpıklığa sahip dağılımlar aradığımız için Cullen ve Frey grafiğinde sunulan en yakın dağılım lojistik dağılımdır. Ancak ele alınan bir diğer dağılım, hisse senedi getirilerinin modellenmesinde çok kullanılan t dağılımıdır. Hisse senedi getirilerine bir t -dağılımı uydurmak için "QRM" paketi kullanılmıştır. X rassal bir değişkense, "fit.st" fonksiyonu v, μ ve σ parametreleri için değer verir. X değişkenine ait kümülatif dağılım fonksiyonu (14) denklemindeki gibi hesaplanır.

$$G(x) = F\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (14)$$

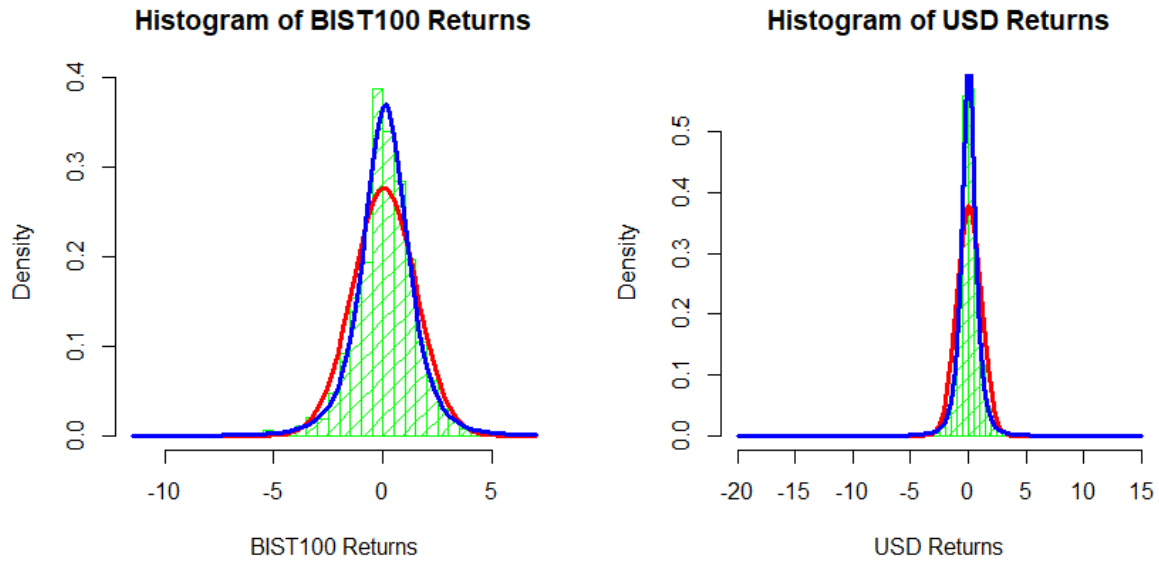
Burada F, v serbestlik dereceli t dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonudur. G fonksiyonunun türevi alınır, X 'in uydurulmuş olasılık yoğunluk fonksiyonu (15) gibi bulunur.

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (15)$$

Burada f, v serbestlik dereceli t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. X değişkeninin ters kümülatif dağılım fonksiyonu (16) denklemindeki gibi hesaplanır.

$$G^{-1}(x) = \sigma F^{-1}(x) + \mu \quad (16)$$

Şekil 6'da uydurulmuş t -dağılımı mavi, uygun normal dağılım ise kırmızı renk ile çizilmiştir.



Şekil 6: BİST ve USD/TL'nin t ve normal dağılım histogramı

Verilerin t ve normal dağılıma uygunluğunun yeterliliği Kolmogorov-Smirnov testi ile kontrol edilmiştir. Kolmogorov-Smirnov testi, bir veri kümesinin bir normal dağılım gösterip göstermediğini test etmek için kullanılan bir istatistiksel testtir (Drezner et al., 2010). Kolmogorov-Smirnov testi, bir dizinin yığılma fonksiyonunun bir normal dağılımdan farklı olup olmadığını karşılaştırarak yapılır.

BİST100 ve USD/TL getirilerinin dağılımını ele alalım. Tablo 3'te birinci test, verilerin normal bir dağılıma uyup uymadığını kontrol etmektedir. İkinci test ise verilerin bir t dağılımına uyup uymadığını kontrol etmektedir.

Tablo 3: Kolmogorov-Smirnov testi

| | Test İstatistikleri | BİST100 | USD/TL |
|---------------------|---------------------|-----------|-----------|
| Birinci Test | D | 0.071957 | 0.17469 |
| | p-değeri | 2.554e-15 | < 2.2e-16 |
| İkinci Test | D | 0.021374 | 0.013004 |
| | p-değeri | 0.09708 | 0.63 |

Birinci testte BİST100 ve USD/TL için p-değeri 0,05'ten küçüktür ($p < 0.05$), bu nedenle verilerin normal bir dağılımdan geldiğine dair boş hipotezi reddedilir. Yani her iki değişken de normal dağılmamaktadır.

BİST100 ve USD/TL için ikinci testte Kolmogorov-Smirnov testi, bir sürekli değişkenin bir teoriye göre dağılımını test etmek için kullanılır. p-değeri sırasıyla 0.097 ve 0.63 olup $p > 0.05$ bulunmuştur. Bu nedenle BİST100 ve USD/TL serilerinin t dağılımına uygun bir dağılım

sergiledikleri söylenebilir.

Şekil 5’te sol tarafta, BİST100 ve USD getirilerinin dağılım grafiği, sağ tarafta ise günlük getirilerinin kümülatif yoğunluk grafiği verilmiştir.



Şekil 5: Günlük getirilerin dağılımı ve kümülatif yoğunluk grafiği

Her marjinal için bir dağılım uyduracağımızı düşünürsek, getiri serilerinin kümülatif dağılım fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak marjinaleri elimine edilebilir. Bu nedenle, sağda, iki değişken arasındaki korelasyon yapısını hala yakalayan bir grafik bulunmaktadır. Sağdaki şekilde, sol üstte ve sağ altta daha fazla nokta yoğunluğunun olduğu görülmektedir. Bu, dağılımların negatif ve pozitif kuyruklar arasında güçlü bir korelasyon ilişkisi olabileceğini göstermektedir.

4.3. Uygun Copula Seçimi

Uygun copula seçilmesinin birkaç nedeni vardır. Birincisi, iki değişkenin dağılımına uyan bir kopula, değişkenler arasındaki ilişkinin daha doğru bir modelini sağlayacaktır. İkincisi, iki değişkenin dağılımına uyan bir kopulanın, değişkenler arasındaki ilişkideki doğrusal olmayan ilişkileri yakalaması daha muhtemeldir. Son olarak, iki değişkenin dağılımına uyan bir kopulanın, değişkenler arasındaki bağımlılıkları yakalama olasılığı daha yüksektir.

R yazılımının “VineCopula” paketi kullanılarak uygun copula seçimi yapıldığında Tablo 4’teki sonuçlar elde edilmiştir. Tablo 4’te “VineCopula” paketi kullanılarak AIC ve BIC kriterleri göz önünde bulundurularak copula ailesi içerisinde verilere en uygun olan copula seçilmiştir.

Tablo 4: Uygun copula seçim sonuçları

| Seçilen Copula | Parametreler | Bağımlılık Ölçüleri | Uyum İstatistikleri |
|----------------|--------------|-------------------------------------|---------------------|
| No: 2 | par: -0.36 | Kendall's tau: -0.23 ($p < 0.01$) | logLik: 256.43 |
| Name: t | par2: 6.6 | Upper TD: 0 | AIC: -508.85 |
| | | Lower TD: 0 | BIC: -496.64 |

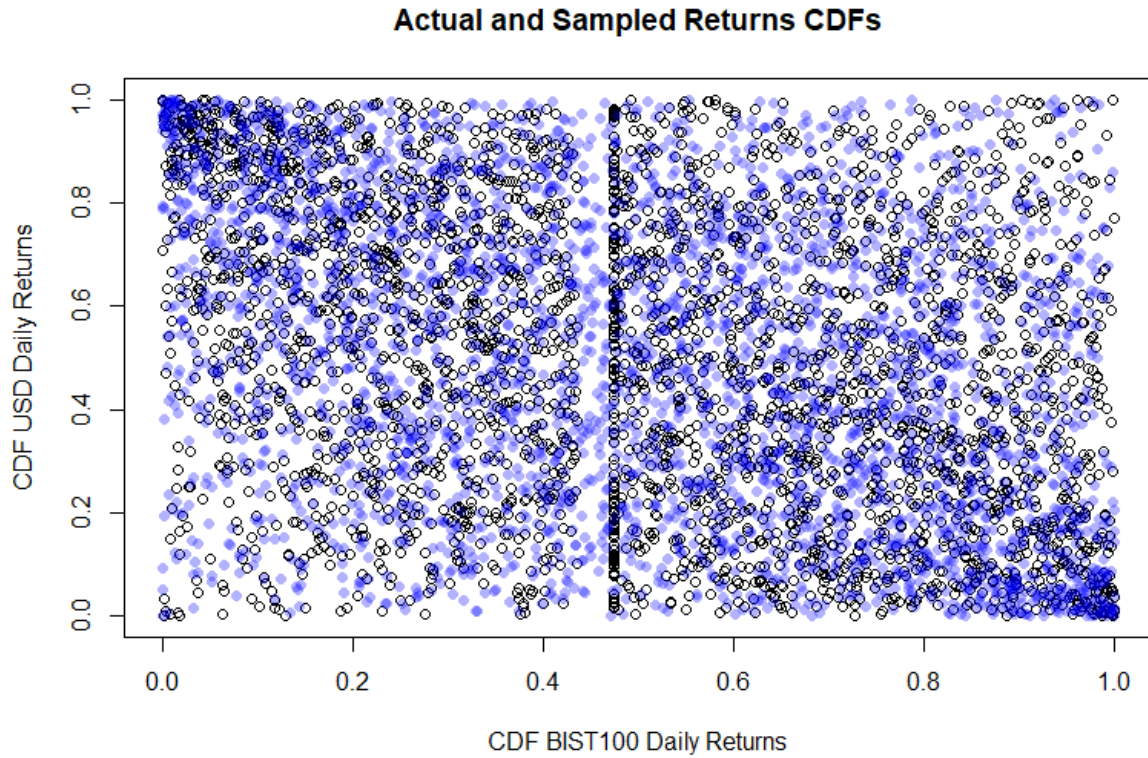
Kendall's tau, örneklem verilerinin bir ilişkinin varlığını veya yokluğunu göstermek için kullanılmıştır. Analiz sonuçları, Kendall tau'nun negatif (-0.23) olduğunu ve p değerinin 0.01'den küçük olduğunu göstermektedir. Bu, BİST100 ve USD/TL arasında zayıf ve ters yönlü bir ilişki olduğunu göstermektedir. Ayrıca analiz sonuçları, Kendall's tau ve uyum istatistiklerinin (AIC ve BIC bilgi kriterleri) kanıtladığı gibi, iki değişken arasında önemli ölçüde doğrusal bir ilişkinin olmadığını göstermektedir.

AIC ve BIC bilgi kriterleri, modelin veriler için iyi bir uyum olduğunu göstermektedir. Ayrıca LogLik değeri (256.43) yüksektir ve Kendall's tau için p değeri ($p < 0.01$) düşük bulunmuştur. Bu sonuçlar da modelin veriler için iyi bir uyum olduğunu göstermektedir.

Tablo 4'teki analiz sonuçları, Kendall's tau istatistiğinin belirttiği gibi, iki değişken arasında önemli bir negatif ilişki olduğunu göstermektedir. Üst TD ve Alt TD (Upper TD and Lower TD) istatistikleri 0 olup iki değişken arasında anlamlı bir doğrusal ilişkinin olmadığını göstermektedir. Ayrıca uyum istatistikleri, modelin verilere iyi uyduğunu göstermektedir. Analiz sonucunda t-copulanın verilere en uygun copula² olduğu göstermektedir.

Seçilen t-copulanın bu özel durumda uygun olup olmadığı konusunda kabaca bir fikir edinmek için t-copula dan rassal bir örneklem üretilebilir. Şekil 6 da rassal olarak üretilen örneklem açık mavi, gerçek veriler ise siyah noktalarla gösterilmiştir.

² Copula ailesi için bakınız: https://www.imsbio.co.jp/RGM/R_rdfile?f=CDVine/man/BiCopPar2TailDep.Rd&d=R_CC



Şekil 6: BİST100 ve USD/TL kümülatif dağılım fonksiyonları

Şekil 6 da gerçek verilerin (siyah) ve örneklem verilerin (mavi) benzer bir dağılıma sahip olduğu görülmektedir. Çünkü her iki değişken de $[0,1]^2$ alanının sınırları içerisinde kalmaktadır.

Buraya kadar iki marjinal dağılımı ve korelasyon yapısını bir copula aracılığıyla modellemeye çalıştık. Böylece Sklar Teoremini kullanarak bu iki finansal aracın günlük getirisinin iki değişkenli dağılımını tanımlamış olduk. Dolayısıyla şimdi portföy VaR 'ını hesaplayabiliriz.

İlk aşamada portföyü oluşturan BİST100 ve USD/TL mevcut değerinin eşit ağırlıklı olduğunu varsayalım. Yani BİST100 ve USD/TL'nin portföydeki ağırlıkları sırasıyla w_1 ve w_2 olsun ve $w_1 = w_2 = 0.5$ olarak alınsın. Bu takdirde %99 güven düzeyinde portföy VaR'nın hesaplanması sonucunda elde edilen sonuçlar Tablo 5'te verilmiştir. Tablo 5'te BİST100 ve USD/TL'nin %99 güven aralığı ve değişik ağırlıklandırmalar kullanılarak hesaplanan VaR değerleri verilmiştir.

Tablo 5: t-copula ve çok değişkenli normal dağılıma ait VaR sonuçları³

| Güven Aralığı | t-copula | | | Çok Değişkenli Normal Dağılım | | |
|---------------|----------|-------|--------|-------------------------------|-------|--------|
| | w_1 | w_2 | VaR | w_1 | w_2 | VaR |
| %99 | 0.5 | 0.5 | -%1.94 | 0.5 | 0.5 | -%1.73 |
| | 0.7 | 0.3 | -%2.55 | 0.7 | 0.3 | -%2.20 |
| | 0.3 | 0.7 | -%1.76 | 0.3 | 0.7 | -%1.66 |
| | | | | | | |

Tablo 5'te farklı ağırlık değerleri için BİST100 ve USD/TL finansal araçlarından oluşan bir portföyün hesaplanan VaR değerleri verilmiştir. Analiz sonucunda t-copula ve çok değişkenli normal dağılımdan elde edilen VaR sonuçları farklı bulunmuştur. İki durum arasındaki farklılıkları belirtmek gerekirse, ilk durumda, portföy riskinin hesaplanması için öncelikle birleştirilen portföy için bir parametrik birleştirilmiş t-copula modeli kullanılmıştır. Daha sonra, bu model kullanılarak oluşturulan birleştirilmiş copula simülasyonu kullanılarak portföy riski hesaplanmıştır. İkinci durumda ise, yalnızca bir parametrik normal kopula kullanılarak portföy riski hesaplanmıştır.

Tablo 5'te %99 güven aralığında BİST100 ve USD/TL'nin eşit ağırlıklı ($w_1 = w_2 = \%50$) alındığı bir portföy durumunu ele alalım. t-copula modeliyle portföy VaR'ı -%1.94, çok değişkenli normal dağılım modeli kullanılarak yapılan hesaplama sonucunda ise VaR -%1.73 bulunmuştur. Elde edilen bu sonuçlardan yaklaşık %0.11'lik bir artışla -%1.73'lük 1 günlük %99 VaR elde edilmiştir.

Analiz sonucunda elde edilen bulgulardan %99 güvenle herhangi bir günde $w_1 = 0.7$ ve $w_2 = 0.3$ ağırlıklarından oluşan bir portföyde yüzde -%2.55'ten daha fazla zararın olması beklenmemektedir. Yani %99 olasılıkla maruz kalınan risk en fazla (maksimum) %2.55 olabilir.

Diğer taraftan portföyün $w_1 = 0.7, w_2 = 0.3$ ve $w_1 = 0.3, w_2 = 0.7$ ağırlıklı iki farklı durum karşılaştırıldığında portföy günlük VaR değerleri sırasıyla -%2.55 ve -%1.76 hesaplanmıştır. Bu sonuçlardan portföy de USD/TL ağırlığı arttıkça günlük risk değerinin azaldığı görülmektedir. Aynı bulgular çok değişkenli normal dağılım içinde geçerli olup t-copula ile elde edilen bulguları desteklemektedir. Yani USD/TL'nin yüksek ağırlıklı olduğu bir portföyün günlük VaR değerinin daha düşük olması beklenir. Bu bulgulardan portföyünde BİST100 ve USD/TL yatırım araçlarını barındıran yatırımcıların günlük VaR'ın düşük olmasını istiyorsa USD/TL'nin BİST100'den daha büyük bir ağırlığa sahip olması gerekir. Dolayısıyla BİST100 ve USD/TL'ye yatırım yapan yatırımcılar için riske göre düzeltilmiş en iyi getirinin USD/TL ağırlığının yüksek olduğu bir portföy olması gerektiğini söylemek mümkündür.

³ Burada olası R_1 ve R_2 değerlerinin (BİST100 ve USD/TL getirileri) büyük bir örneklem (1.000.000 boyutunda) oluşturulmuş ve $w_1 R_1 + w_2 R_2 = 0.5BİST100 + 0.5USD$ 'nin yüzde 1'lik (%1) dilimi hesaplanmıştır. Bu 20 kez tekrarlanarak yüzdeler dilimlerin ortalaması %99 VaR olarak alınmıştır.

5. Sonuç

Yatırımcılar, sermayelerini korumak ve daha yüksek getiri elde etmek için portföylerindeki riski en aza indirmeye çalışırlar. Çeşitlendirme, riski azaltmanın bir yoludur ve yatırımcılar kayıplara karşı korunmak için riskten korunma gibi yatırım stratejilerini de kullanabilir. Bir portföy oluştururken, yatırımcılar genellikle risk ve getiri arasında bir denge bulmak isterler. Yani getirisi yüksek ama çok riskli olmayan yatırımlar yapmak isterler. Daha yüksek getiriye sahip yatırımlar genellikle daha yüksek risklerle geldiğinden, çoğunlukla bunu başarmak zordur.

Birçok yatırımı tek bir portföyde birleştirme yöntemi olan portföy yönetimi yatırımcılar için oldukça önemlidir. Yatırımcılar portföylerinin güvenilirliğini artırmak için çeşitli yöntemler kullanırlar. Bu yöntemler sayesinde, portföylerinin ne kadar güvenilir olduğunu ve ne kadar büyük bir risk taşıdığını anlayabilirler. Yatırımcıların portföylerinin güvenilirliğini artırmak için kullandıkları yöntemlerden birisi de copula yöntemidir. Copula yöntemi, yatırımcıların portföylerinin güvenilirliğini artırır ve bu sayede yatırımcılar, riskleriyle daha az problem yaşarlar. Copula yöntemi ile VaR tahmini, birikimlerini güvenli bir şekilde yönetmek isteyen yatırımcılara yol göstermektedir.

Bu çalışmada, çok değişkenli copula yöntemi kullanılarak finansal risk tahminlemesi yapılması amaçlanmıştır. Çalışma yatırımcılara öngörüler sağlanmasının yanı sıra, bu yöntem portföyün VaR hesaplanmasında kullanılmıştır. Copula yönteminin kullanılmasının temel nedeni, varlık fiyatları getirileri için çok değişkenli bir normal dağılımın varsaydığı standart VaR hesaplama yönteminden daha az varsayıma dayanmasıdır. Çalışmada 04.01.2010-13.09.2022 dönemi arasında günlük BİST100 ve USD/TL günlük getiri oranları kullanılmıştır. R yazılımı kullanılarak yapılan analizler sonucunda BİST100 ve USD/TL arasındaki korelasyon yapısı en iyi t-copula ile modellenmiştir. Elde edilen t-copula modeli sayesinde, korelasyon yapısının uyumu iyileştirilerek portföy VaR'ının gereğinden çok veya az tahmin edilmesi önlenmiştir. t-copula kullanarak %99 güven düzeyinde portföyün VaR'ı hesaplanmış ve çok değişkenli normal dağılım olduğu kabul edilen portföy VaR sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Analiz sonucunda t-copula modeli kullanılarak hesaplanan portfolyo VaR'ının, çok değişkenli normal dağılım kullanılarak hesaplanan portfolyo VaR'ından daha yüksek olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak BİST100 ve USD/TL korelasyon ilişkisinin copula yöntemiyle incelendiği bu çalışmada iki değişken arasında negatif bir korelasyon ilişkisi (-0.34) bulunmuştur. Bu sonuç Zengin (2020), Yıldırım ve arkadaşları (2021) ve Göçmen (2021) çalışmalarından elde edilen sonuçları desteklemektedir. İktisadi açıdan değerlendirildiğinde, Dolar kuru ve BİST100 (hisse senetleri) arasında negatif bir ilişki olduğu görülmektedir. Yani Dolar kuru yükseldikçe BİST100 değer kaybetmektedir.

Son olarak bu çalışmanın en önemli sonuçlarından birisi de Türk yatırımcısının en çok tercih ettiği BİST100 ve USD/TL yatırım araçlarını kullanma konusunda yol gösterici olmasıdır. Elde edilen bulgular düşük riskli yüksek getirili bir portföy oluşturmak isteyen yatırımcıların portfolyolarında USD/TL ağırlığının BİST100 den daha büyük alması gerektiğini göstermektedir. Ayrıca, copula yönteminin kullanılması, yatırımcıların portföyleri hakkında daha bilinçli kararlar vermelerine yardımcı olmaktadır.

Kaynakça

- Akdağ, S., & Yıldırım, H. (2021). The Effect of Uncertainties in European Economic Policies on the BIST 100 Index. *Ekonomi, Politika & Finans Araştırmaları Dergisi*, 322–331.
- Akın, O., Onat, O. K., & Özgen Öney, F. Ö. (2018). Makroekonomik Gelişmelerin Bist-100 Endeksi Üzerindeki Etkilerinin Araştırılması. 4. *Th International Congress on Political, Economic and Social Studies (ICPESS)*, 28-30 June 2018, 118–123. www.pesa.org.trwww.cpass.org
- Ayvaz, Ö. (2006). Döviz Kuru ve Hisse Senetleri Fiyatları Arasındaki Nedensellik İlişkisi. *Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 8(2), 1–14.
- DataScienceGenie. (2022). *Computing the Portfolio VaR Using Copulas*. <https://datasciencegenie.com/computing-the-portfolio-var-using-copulas/>
- Drezner, Z., Turel, O., & Zerom, D. (2010). A Modified Kolmogorov–Smirnov Test for Normality. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 39(4), 693–704.
- Genç, A., & Öztürk, C. (2021). Türkiye’de Hisse Senedi Fiyatları ile Döviz Kuru Arasındaki İlişki: Asimetrik Nedensellik ve Markov Rejim Değişim Modeli Yaklaşımı. *Journal of Yaşar University*, 16(62), 601–617.
- Göçmen Yağcılar, G. (2021). Likidite, Kur ve Volatilitenin BİST-100 Endeksine Etkisi: Markov Rejim Değişimi Yaklaşımı. *International Journal of Business, Economics and Management Perspectives*, 5(1).
- Hamad Ameen, M., Temizel, F., & Kamışlı, M. (2020). Enflasyonun Borsa Endeksleri Üzerindeki Etkileri: BİST 100 Endeksinden kanıt. *İnsan ve Toplum Bilimleri Araştırmaları Dergisi*, 9(3), 1924–1938.
- Hoffmann, A. O. I., Post, T., & Pennings, J. M. E. (2013). Individual Investor Perceptions and Behavior During the Financial Crisis. *Journal of Banking & Finance*, 37(1), 60–74.
- Huang, J.-J., Lee, K.-J., Liang, H., & Lin, W.-F. (2009). Estimating Value at Risk of Portfolio by Conditional Copula-GARCH Method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3), 315–324.
- Hrys, M., & Schwarz, J. (2014). Multivariate Gaussian Copula in Estimation of Distribution Algorithm with Model Migration. *2014 IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence (FOCI)*, 114–119.
- Ismail, M. S., Noorani, M. S. M., Ismail, M., Razak, F. A., & Alias, M. A. (2022). Early Warning Signals of Financial Crises Using Persistent Homology. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 586, 126459.
- Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application. *Journal of International Money and Finance*, 25(5), 827–853.
- Kaura, V. (2005). Portfolio Optimisation Using Value at Risk. In *Project Report*. <http://www.doc.ic.ac.uk/~vk02/project>.

- Kole, E., Koedijk, K., & Verbeek, M. (2007). Selecting Copulas for Risk Management. *Journal of Banking & Finance*, 31(8), 2405–2423.
- Krężolek, D. (2016). The Gluevar Risk Measure and Investor's Attitudes to Risk– An Application to The Non-Ferrous Metals Market. *Statistics in Transition. New Series*, 17(2), 305–316.
- Ielpo, F., & Merhy, C. (2017). *Engineering Investment Process: Making Value Creation Repeatable*. Elsevier.
- Liu, J., Jin, F., Xie, Q., & Skitmore, M. (2017). Improving Risk Assessment in Financial Feasibility of International Engineering Projects: A Risk Driver Perspective. *International Journal of Project Management*, 35(2), 204–211.
- Ma, Z., Davis, S. W., & Ho, Y. (2022). Flexible Copula Model for Integrating Correlated Multi-omics Data from Single-cell Experiments. *Biometrics*.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* (Springer). Springer.
- Notsu, A., Kawasaki, Y., & Eguchi, S. (2013). Detection of Heterogeneous Structures on the Gaussian Copula Model Using Projective Power Entropy. *ISRN Probability and Statistics*, 2013, 1–10.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional Value-at-risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443–1471.
- Sadgrove, K. (2016). *The Complete Guide to Business Risk Management*. Routledge.
- Senol, Z. (2021). Borsa Endeksi, Döviz Kuru, Faiz Oranları ve CDS Primleri Arasındaki Oynaklık Yayılımları: Türkiye Örneği. *Business and Economics Research Journal*, 12(1), 111–126.
- Yamai, Y., & Yoshida, T. (2005). Value-at-risk Versus Expected Shortfall: A Practical Perspective. *Journal of Banking & Finance*, 29(4), 997–1015.
- Yıldırım, S., Canadova, R., Esen, E., & Temizel, F. (2021). BİST 100 Endeksinin Döviz Kuru Değişimleri ile Simetrik ve Asimetrik İlişkisi. *Finansal Araştırmalar ve Çalışmalar Dergisi*, 272–284.
- Yıldız, B. & Yılmaz, T. (2022). Yabancı Para Pozisyonunun Firma Kârlılığına Etkisi: Borsa İstanbul Örneği. *Ordu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Sosyal Bilimler Araştırmaları Dergisi*, 12 (2), 1399-1418.
- Yılmaz, T. & Yıldız, B. (2022). Yatırımcıların Risk İştahı Endeksi ile Korku Endeksleri Arasındaki İlişki: Türkiye'de ARDL İle Ampirik Bir Uygulama. *Ekonomi Politika ve Finans Araştırmaları Dergisi*, 7 (3), 646-676.
- Yücel, E. (2021). A Research on The Causal Relationship Between Investment Preferences. *IEDSR Association*, 6(16), 36–46.
- Zeng, X., & Durrani, T. S. (2011). Estimation of Mutual Information Using Copula Density Function. *Electronics Letters*, 47(8), 493.

Zengin, B. (2020). Faiz Oranları, ABD Doları, Euro ve Bist 100 ün Bist Bankacılık Endeksi ile İlişkisi: Türkiye Üzerine Bir Uygulama. *Türk Turizm Arastirmalari Dergisi*, 1(1), 77–87.